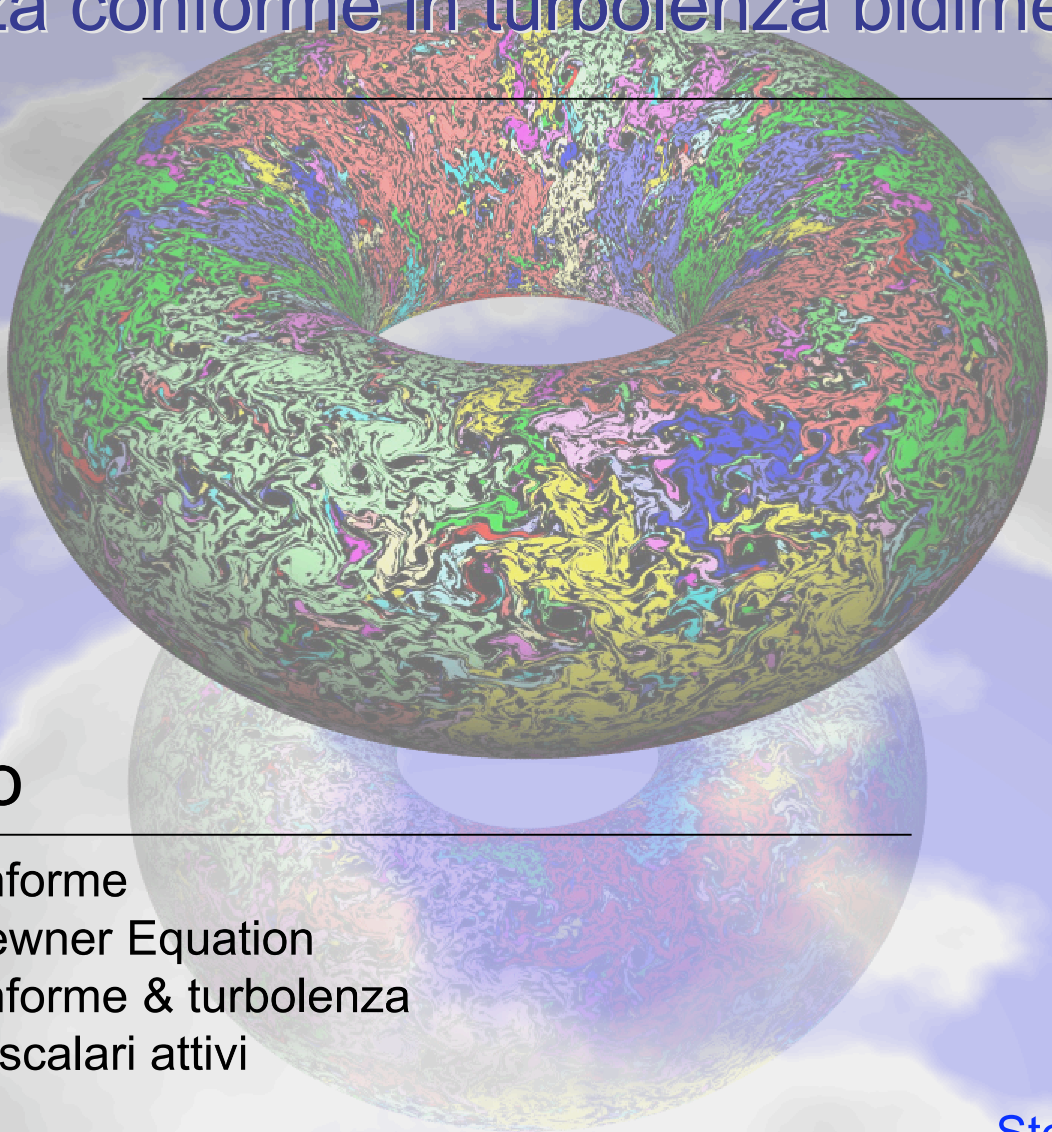
Invarianza conforme in turbolenza bidimensionale



Sommario

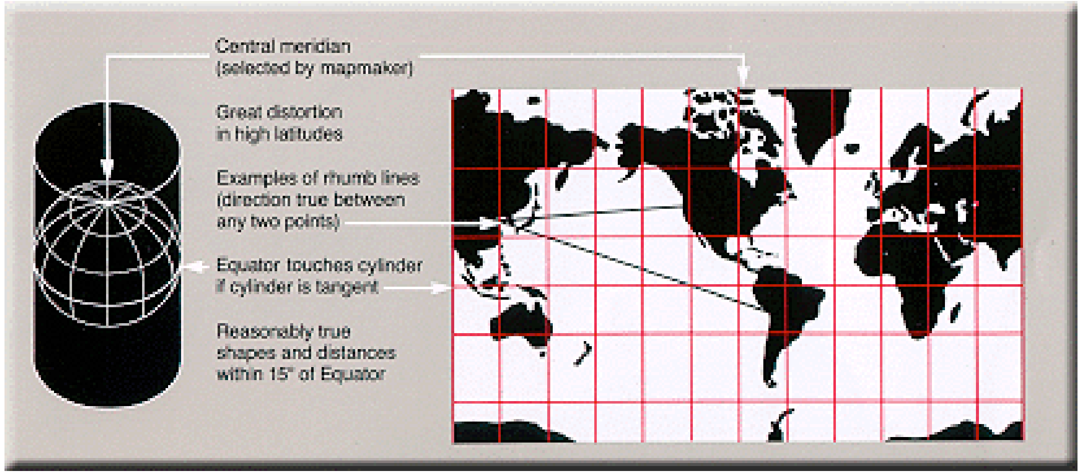
- Invarianza conforme
- Stochastic Loewner Equation
- Invarianza conforme & turbolenza
- Turbolenza di scalari attivi

Stefano Musacchio

Trasformazioni conformi

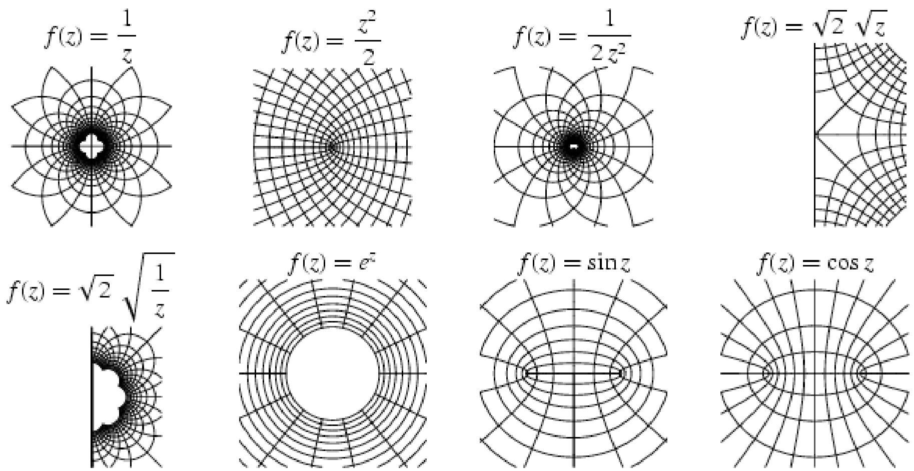
Transformazione locale di scala che conserva gli angoli.

Le trasfornazioni conformi sono usate in cartografia perche` conservano le direzioni
(es. proiezione di Mercatore)

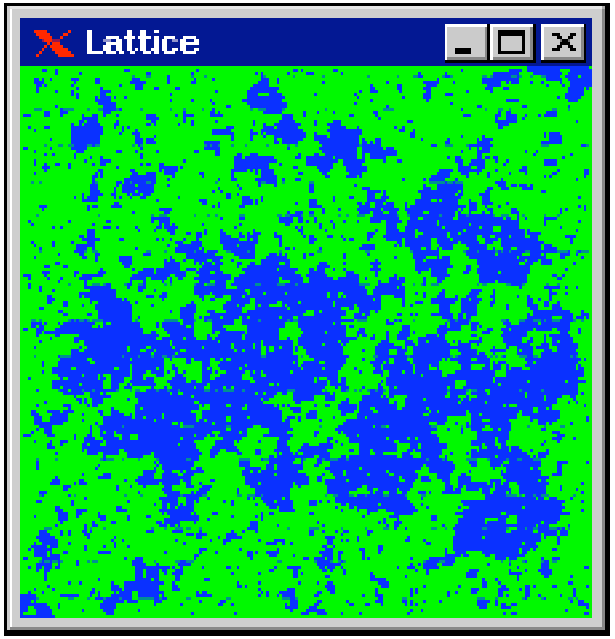


In D>2 le trasformazioni conformi sono traslazioni, rotazioni, dilatazioni, e SCT

In D=2 le trasformazioni conformi sono funzioni analitiche nel piano complesso

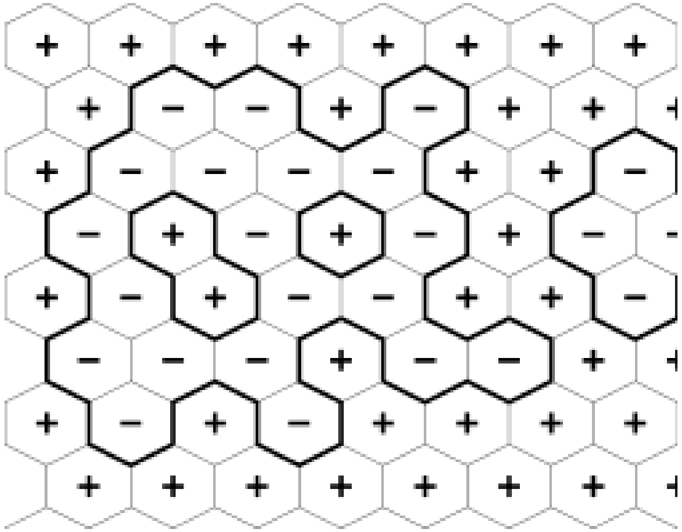


Sistemi critici 2D



In meccanica statistica i sistemi critici 2D invarianti per trasformazioni conformi sono classificabili in classi di universalita`

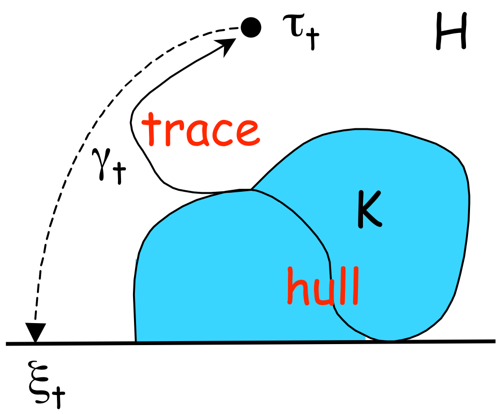
Nota la classe di universalita` del sistema si possono predire esponenti di scala, correlazioni, dimensioni frattali...



Le proprieta` statistiche dei modelli su reticolo dipendono dalle proprieta` dei loop.
(ad esempio nel modello di Ising l'energia e proporzionale alla lunghezza delle interfacce e la funzione di partizione si puo` scrivere come somma sui loop).

Schramm Loewner Equation

Data una curva γ_t nel semipiano H, esiste una trasformazione conforme $g_t(z)$ che mappa l'hull K della curva nell'asse reale.



$g_t(z)$ conformal map $H \backslash K \mapsto H$

La crescita della curva nel semipiano e` mappata nell'evoluzione della mappa $g_t(z)$

Loewner Equation

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}$$

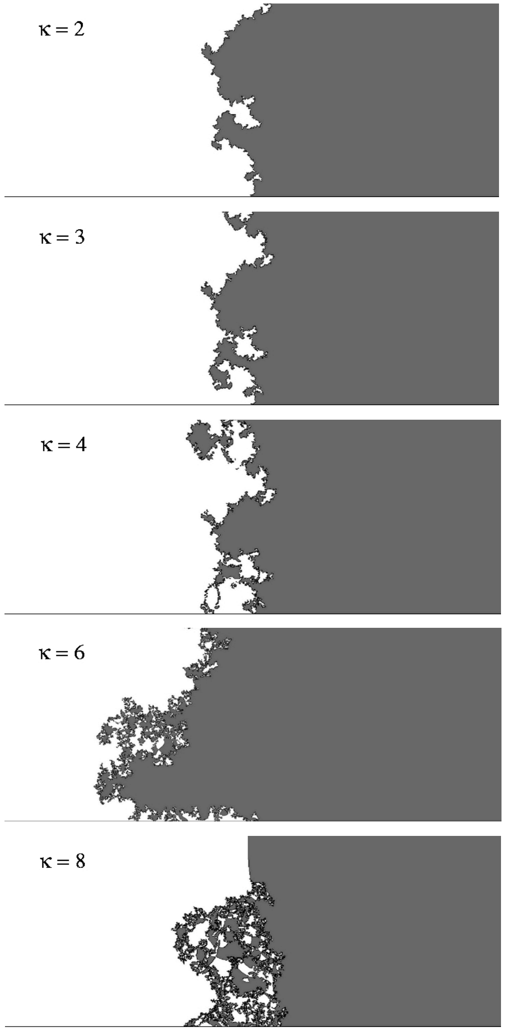
$$g_{t=0}(z) = z$$

corrispondenza biunivoca fra la curva $\gamma \in \mathbf{C}$ e la funzione $\xi \in \mathbf{R}$ (driving)

Invarianza conforme $\Leftrightarrow$ $\xi_t = \sqrt{\kappa} B_t$ O. Schramm, Israel J.Math. **118** (2000) 221

SLE e sistemi critici

Diversi valori della diffusivita` κ corrispondono
a diverse classi di universalita`



$\kappa = 2$ loop-erased random walk

$\kappa = 8/3$ self avoiding random walk

$\kappa = 3$ cluster boundaries in Ising

$\kappa = 4$ isolines in O(2) model

$\kappa = 6$ cluster boundaries in percolation

$\kappa = 8$ uniform spanning trees

Studio dei sistemi critici 2D
ridotto allo studio di un moto browniano 1D

Cardy, SLE for theoretical physicists, Ann.Phys. **318**, 81 (2005)

Turbolenza & invarianza conforme

Il moto di un fluido newtoniano incompressibile e` governato dalle equazioni di Navier-Stokes (1823)

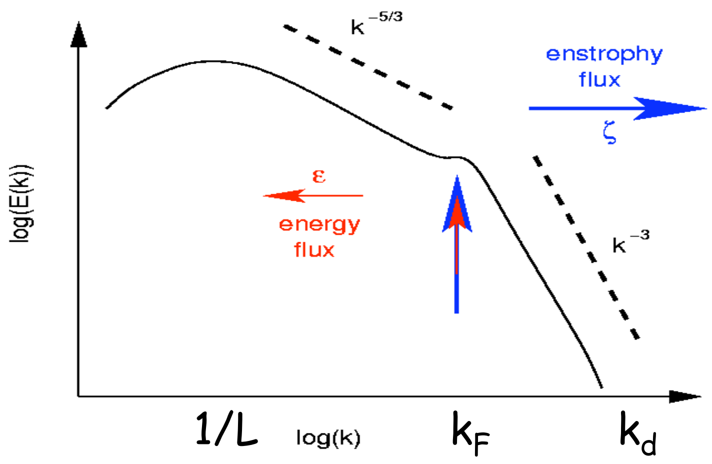
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

In 2D ci sono due invarianti inviscidi: doppia cascata.

Energia $E = \frac{1}{2}\langle u^2 \rangle$

Enstrofia $Z = \frac{1}{2}\langle \omega^2 \rangle$



La turbolenza 2D e` un sistema statistico fuori dall'equibrio.
Nel regime di cascata inversa e` omogenea, isotropa e invariante di scala.

Studiare le proprieta` geometriche di un campo scalare: la vorticita`. $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$

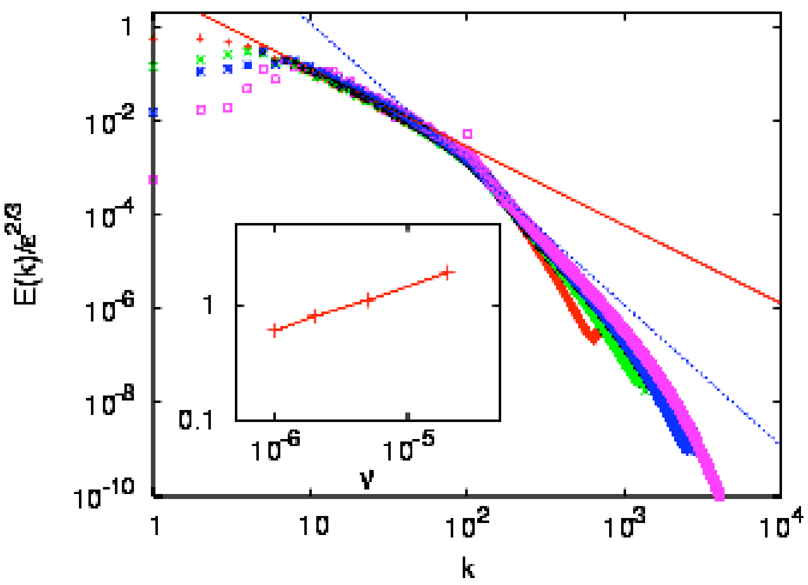
Simulazioni numeriche Navier Stokes

Simulazioni numeriche dell'equazione di NS ad alta risoluzione con codici paralleli pseudospettrali.

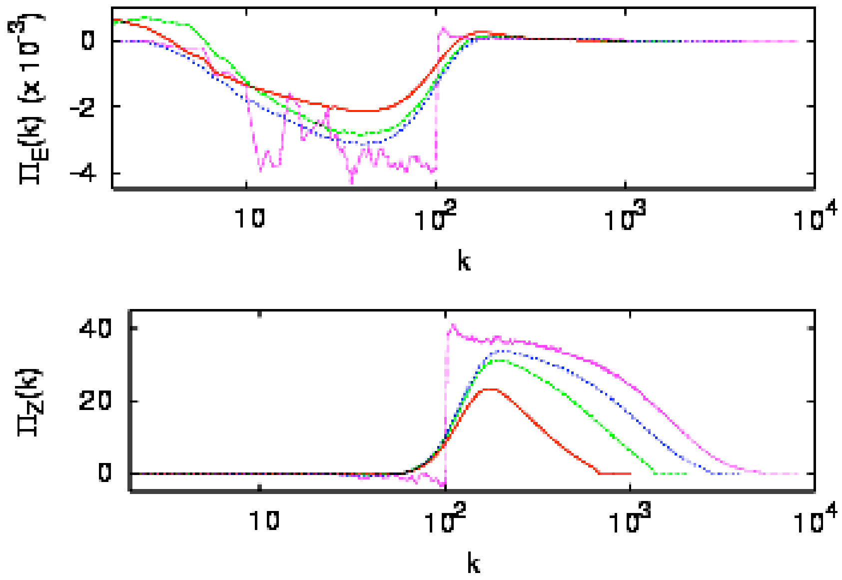
Doppia cascata

N	ν	α	L/r_F	r_F/r_η	$\varepsilon_\alpha/\varepsilon_I$	ζ_ν/ζ_I
2048	2×10^{-5}	0.015	100	26	0.54	0.97
4096	5×10^{-6}	0.024	100	53	0.82	0.92
8192	2×10^{-6}	0.025	100	81	0.92	0.90
16384	1×10^{-6}	0.0	100	115	0.95	0.95

Spettri di energia



Flussi di energia/enstrofia

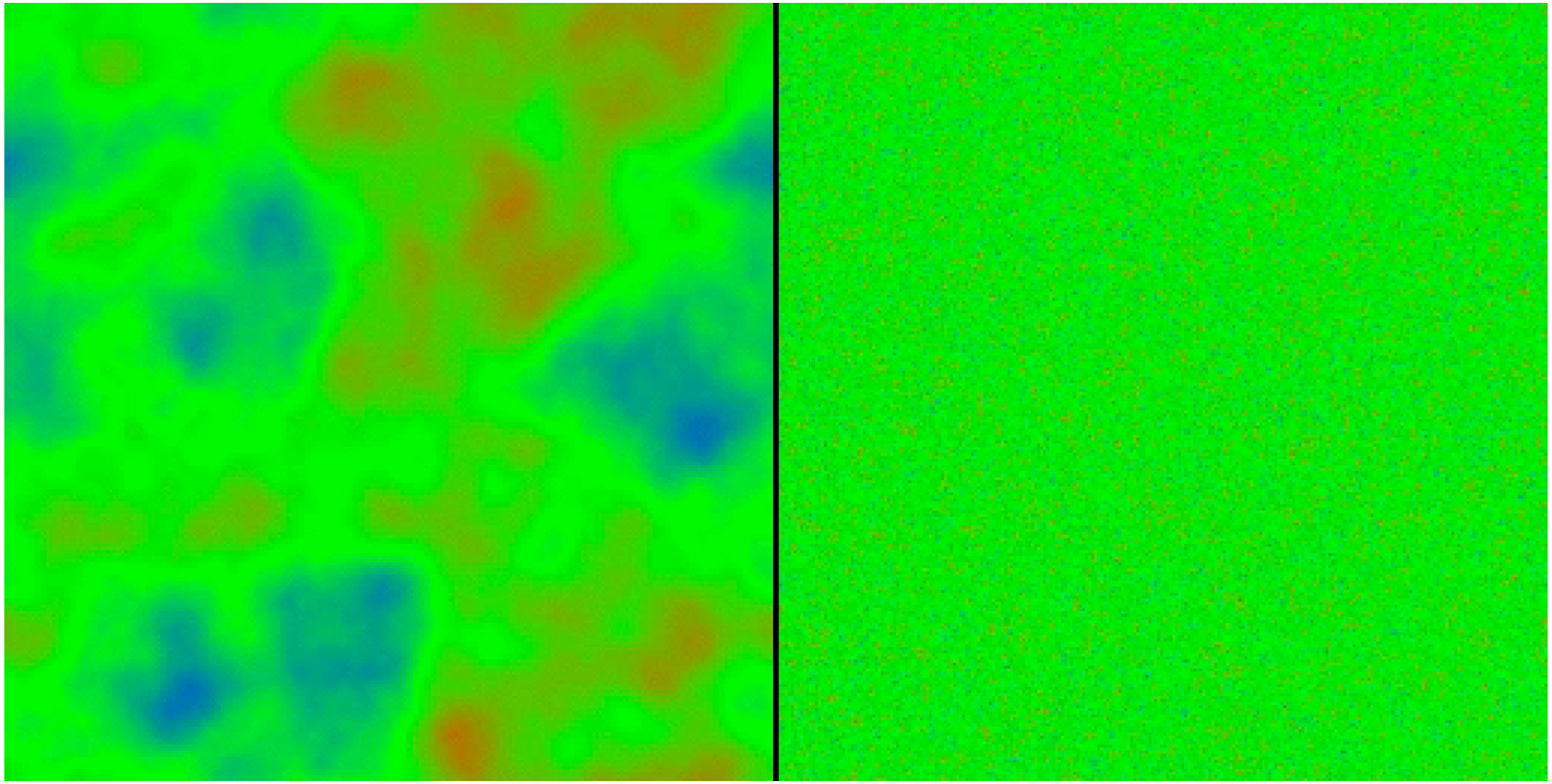


S. Musacchio - 2008

Simulazioni numeriche Navier Stokes

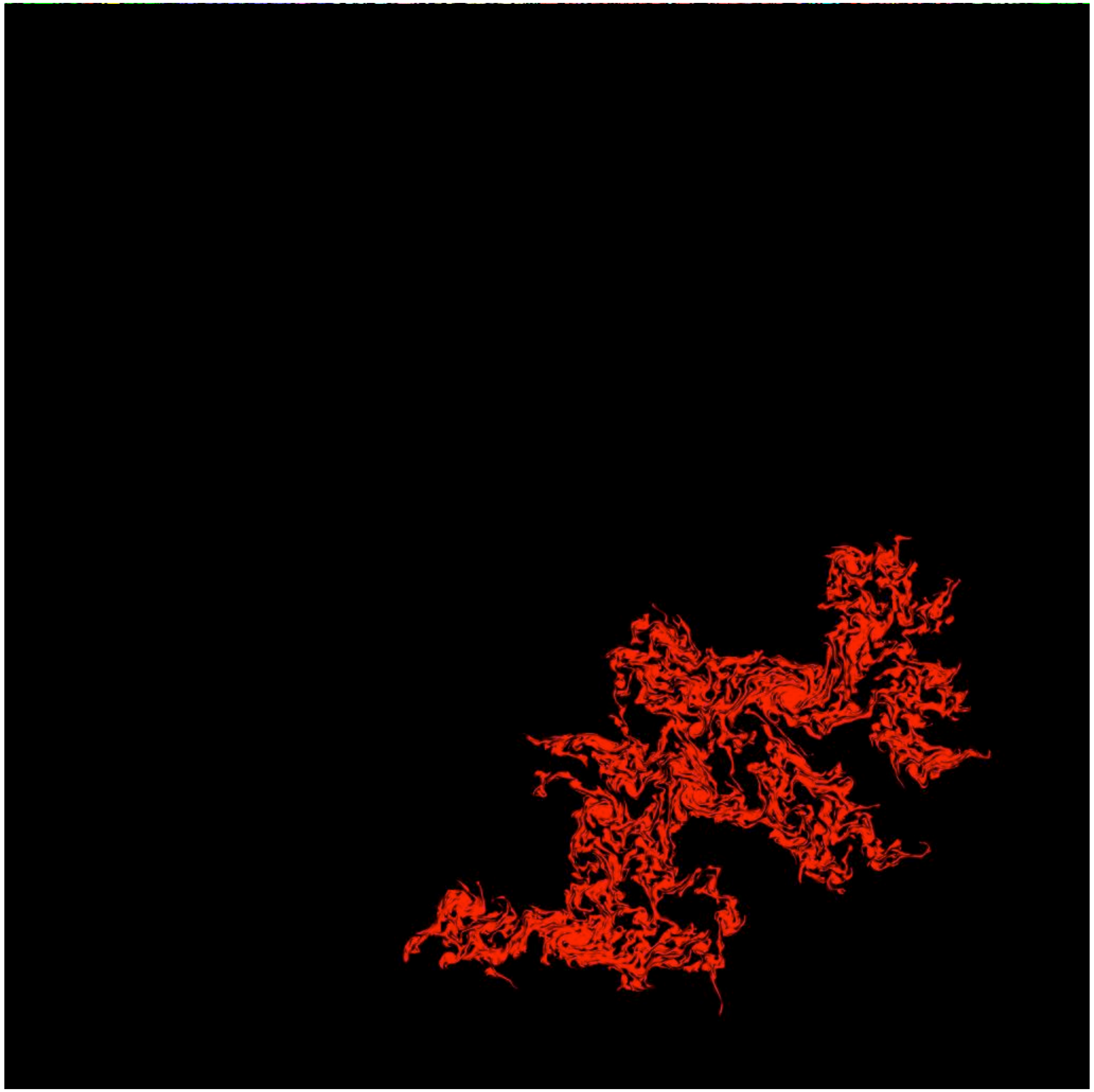
stream function
(strutture a grande scala)

vorticita`
(strutture a piccola scala)



Cluster di vorticita`

Dai campi di vorticita` si identificano i cluster di vorticita` positiva e negativa, separati da isolinee di vorticita` nulla

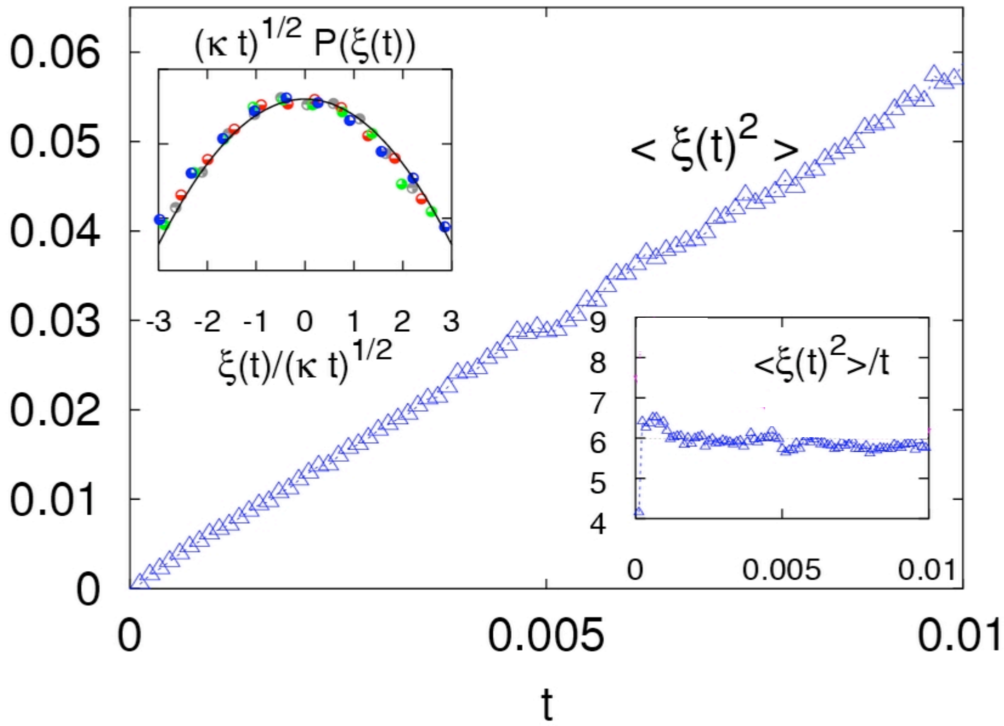


Le isolinee di vorticita nulla sono invarianti conformi?

Turbolenza & invarianza conforme

Dalle isoline di vorticita` si ricostruisce il driving invertendo la SLE

Il driving $\xi(t)$ e` un moto browniano.



Le isolinee di vorticita` nulla nella cascata inversa della turbolenza bidimensionale descritta dalla equazioni di Navier-Stokes sono curve SLE nella stessa classe di universalita` della percolazione $\kappa = 6$

Bernard, Boffetta, Celani, Falkovich, Nature Physics **2**, 124 (2006)

Cluster di vorticita' e percolazione

La cascata inversa e` solo un modo complicato di generare un campo di percolazione?

Percolazione indipendente richiede lunghezza di correlazione finita.

Percolazione correlata: $\langle \theta(x+r)\theta(x) \rangle \sim r^{-2H}$

H > 3/4 stessa classe di universalita' della percolazione
(Harris 1974, Weinrib 1984)

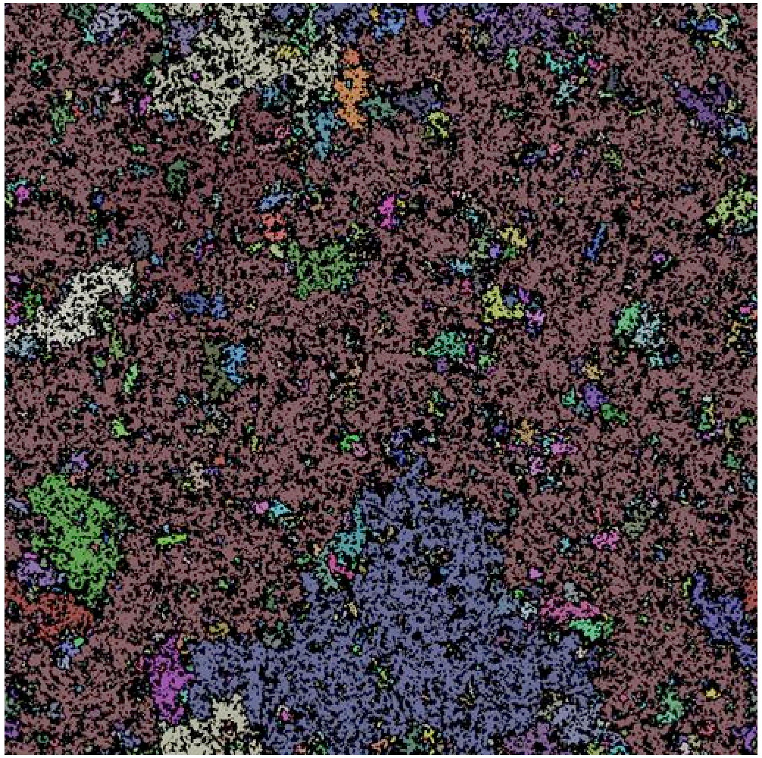
Per la vorticita` in cascata inversa si ha: $\langle \omega(x+r)\omega(x) \rangle \sim r^{-4/3}$
cioe' H=2/3 < 3/4

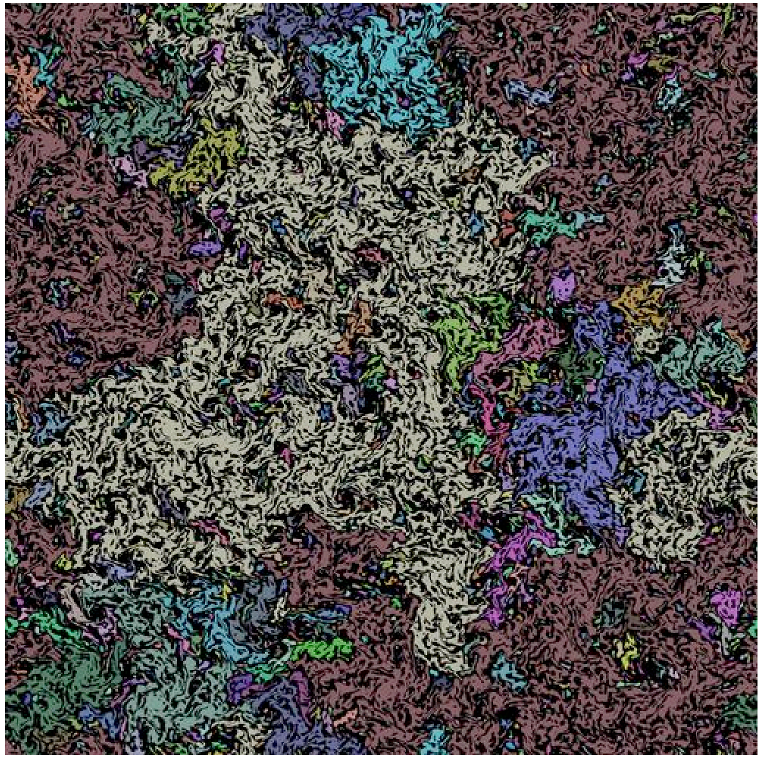
Diverso dalla percolazione, ma vicino.

Confronto con un campo gaussiano con lo stesso spettro di Fourier (randomizzazione delle fasi): verifica dell'importanza della dinamica.

Confronto con campo gaussiano

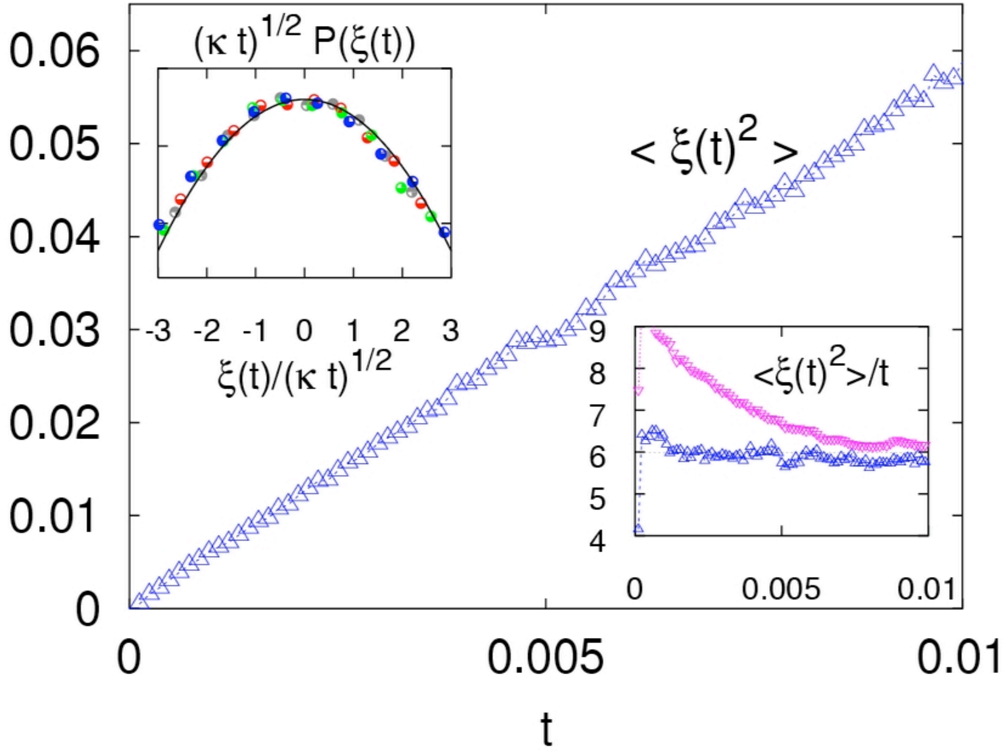
Confronto con un campo gaussiano con lo stesso spettro di Fourier ottenuto mediante randomizzazione delle fasi:
verifica dell'importanza delle correlazioni generate dalla dinamica.





Turbolenza & invarianza conforme

Le isolinee del campo gaussiano ottenuto randomizzando le fasi non sono SLE.



Le correlazioni generate dalla dinamica delle equazioni di Navier-Stokes sono fondamentali per l'invarianza conforme.

Turbolenza di campi scalari attivi

Le equazioni di Navier Stokes per il campo di vorticita` sono formalmente identiche a equazioni di trasporto per un campo scalare attivo

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = D + F$$
$$\mathbf{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$$
$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$
$$\omega(k) = |k|^2 \psi(k)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = D + F$$
$$\mathbf{u} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$$
$$\theta(k) = |k|^\alpha \psi(k)$$

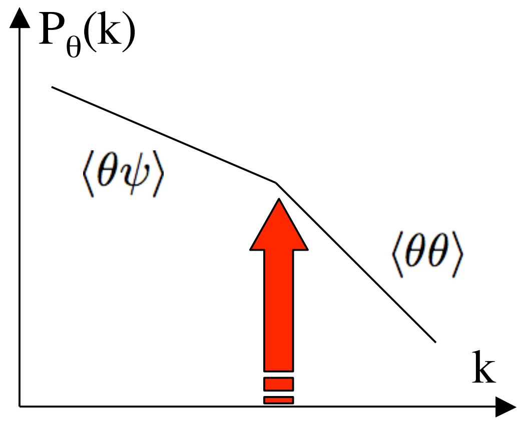
R.T. Pierrehumbert, I.M. Held, K.L. Swanson, Chaos Solitons Fractals **4** (1994) 111

Due quantita` conservate per F=D=0
Doppia cascata

$\alpha > 0$

Cascata inversa $\langle \theta \psi \rangle$

Cascata diretta $\langle \theta \theta \rangle$



Turbolenza di scalari attivi & invarianza conforme

$\alpha = 2$ Navier Stokes

θ isolinee di vorticita sono SLE $\kappa = 6$
Bernard *et al*. Nature Physics **2**, 124 (2006)

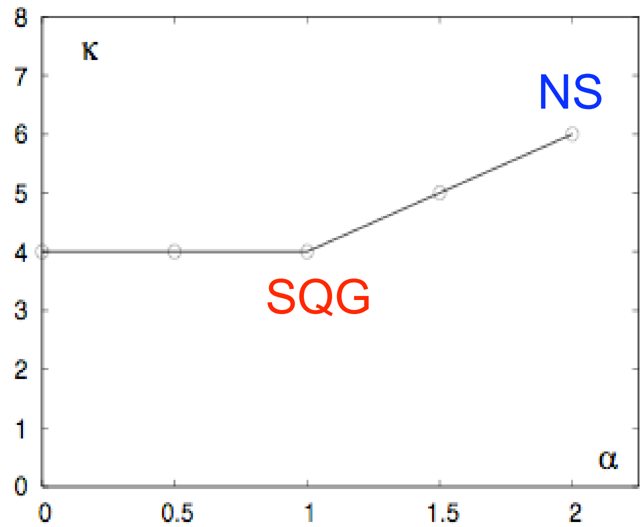
$\alpha = 1$ Surface Quasi Geostrophic

θ isolinee di temperatura sono SLE $\kappa = 4$
Bernard *et al*. PRL **98** , 024501 (2007)

La turbolenza di campi scalari attivi nel regime di cascata inversa mostra proprieta` di invarianza conforme.

Le isolinee nulle del campo θ sono curve SLE.

La dinamica lagrangiana genera relazioni non banali fra gli esponenti di scala del campo e la dimensione frattale delle isolinee.



Conclusioni

La turbolenza bidimensionale nel regime di cascata inversa mostra proprieta` di invarianza conforme.

Le isolinee di vorticita` nulla sono curve SLE nella stessa classe di universalita` della percolazione $\kappa = 6$

L'invarianza conforme e` presente in una classe piu` estesa di equazioni che descrivono cascate inverse turbolente di campi scalari attivi.